

ISBN: 978-979-028-071-7

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA TAHUN 2009

PROSIDING

Editor:

Herry Agus Susanto
Bambang Suharjo
Sudarman
Nuh. Rizal
Susanto
Saiman
Kamid



Forum Komunikasi Mahasiswa
Program Doktor Matematika Indonesia
Bekerjasama dengan
Program Pascasarjana
Universitas Negeri Surabaya



PENERBIT:
UNESA UNIVERSITY PRESS
ANGGOTA IKAPI

BIDANG :

ANALISIS, ALJABAR, TERAPAN, DAN KOMPUTASI

DAFTAR ISI

ANALISIS SYARAT BATAS EXERCISE OPTIMAL PADA OPSI PUT AMERIKA YANG MEMBAYARKAN DIVIDEN Andi Fajeriani Wyrasti	1
THE ROLE OF SIGMA OPERATOR IN EDUCATION OF SPACE SCIENCE Bachtiar Anwar	5
KAJIAN MATEMATIS PADA METODE EPHEMERIS HISAB RUKYAT DAN JEAN MEEUS UNTUK MENENTUKAN HISAB AWAL BULAN QOMARIYAH Dyah Worowirastrri Ekowati	12
<i>ANALYTICAL HIERARCHY PROCESS</i> (AHP) UNTUK PENENTUAN PRIORITAS PEMELIHARAAN JALAN BERDASARKAN KETERSEDIAAN ALOKASI DANA DI KABUPATEN TULUNGAGUNG Eni Setyowati	32
KOMPUTASI PERSAMAAN LAPLACE PADA DISTRIBUSI SUHU PADA PELAT PERSEGI DENGAN METODE MONTE CARLO Gagus Ketut Sunnardianto	48
APLIKASI MODEL TURBULEN SECARA ALJABAR DALAM SIMULASI ALIRAN FLUIDA Gunarjo Suryanto Budi	56
PENERAPAN TEORI LIMIT PUSAT MULTIVARIAT PADA PENGENDALIAN PROSES PELAYANAN DI POLIKLINIK RAWAT JALAN RUMAH SAKIT UMUM KARDINAH TEGAL Isnani, M.Si	63
SISTEM KENDALI Pengereman pada kontrol motor DC menggunakan FLC B. S. Rahayu Purwanti	75
KOMPRESI CITRA MEDIS TIGA DIMENSI MENGGUNAKAN PENGKODEAN RUN-LENGTH Sri Utami, Mochamad Hariadi, dan I Ketut Eddy Purnama	88

TEOREMA LUSIN PADA RUANG METRIK KOMPAK LOKAL Manuharawati	94
GRAF BERDIAMETER DUA TERBESAR Yus Mochamad Cholily.....	101
CONFIDENCE BANDS FOR AIR POLLUTANT (CARBON MONOXIDA) WITH BOOTSTRAP PERCENTILE Akhmad Fauzy	107
THE MHD EQUILIBRIUM ONSET OF SOLAR CORONAL HELMET STREAMER: WARNING OF THE CORONAL MASS EJECTION Bambang Setiahadı	116

Teorema Lusin pada Ruang Metrik Kompak Lokal

Manuharawati
Jurusan Matematika FMIPA Unesa Surabaya
e-mail: manuhara1@yahoo.co.id

Abstrak

Teorema Lusin pada bilangan real mempunyai banyak peran dalam perkembangan teori integral pada garis real. Teorema ini telah banyak dibahas dalam textbook analisis, antara lain dalam Real Analysis (Royden, 1989). Pada tahun 2002, Manuharawati telah berhasil membangun ruang ukuran lengkap pada ruang metrik kompak lokal. Selanjutnya juga dibangun himpunan terukur - μ^* dengan μ^* adalah ukuran luar yang dibangkitkan oleh fungsi volum ν . Berdasarkan hal tersebut, dalam makalah ini dibahas tentang beberapa sifat fungsi terukur - μ^* , khususnya sifat himpunan terukur yang diharapkan dapat digunakan dalam teori integral tipe Riemann, yaitu Teorema Lusin.

Kata kunci: ruang metrik kompak lokal, ruang ukuran lengkap, fungsi terukur.

A. Pendahuluan

Teorema Lusin dan teorema Egoroff merupakan dua sifat fungsi terukur Lebesgue pada garis real yang telah banyak dibahas dalam buku-buku analisis; antara lain telah ditulis dalam “Real Analysis” (Royden, 1989). Teorema ini mempunyai peranan penting dalam perkembangan teori integral. Hal ini antara lain ditunjukkan oleh keberhasilan pakar teori integral, Soeparna Darmawijaya, Yusuf, dan Y.M. Sri Daru Unaningsih dalam “Posisi Integral Lebesgue di dalam Integral Henstock”. Dengan keberhasilan ini muncullah teori-teori yang terkait, seperti sifat small Riemann Sum pada integral Henstock di dalam garis real (Soeparna Darmawijaya: 1995).

Dilandasi teori tersebut dan dengan mengingat telah dibangunnya konsep himpunan terukur - μ^* dimana μ^* adalah ukuran luar yang dibangkitkan oleh fungsi ukuran ν pada ruang metrik kompak lokal (Manuharawati: 2002), maka untuk memperluas teori integral pada ruang abstrak, khususnya dalam ruang

metrik kompak lokal nondiskret, dibahas beberapa sifat fungsi terukur - μ^* , di antaranya sifat yang dikenal dengan teorema Lusin.

B. Konsep Dasar dan Teorema Pendukung

Beberapa konsep dasar dan teorema-teorema yang diperlukan dalam pembahasan diuraikan sebagai berikut.

Diberikan ruang metrik kompak lokal nondiskret X , $\mathcal{S}$ adalah sistem interval pada X , $\mathcal{S}(X)$ adalah koleksi semua himpunan elementer pada X , dan ν merupakan fungsi volum pada $\mathcal{S}$, dan μ^* adalah ukuran luar yang dibangkitkan oleh fungsi ukuran ν .

Himpunan $E \subset X$ dikatakan **terukur- μ^*** jika untuk setiap $A \subset X$ berlaku

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Jika terukur- μ^* , ukuran dari E dinotasikan dengan $\mu(E)$.

Teorema berikut merupakan karakteristik himpunan terukur- μ^* yang akan digunakan dalam pembahasan.

Teorema B.1: *Himpunan $E \subset X$ adalah terukur- μ^* jika dan hanya jika untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan tertutup F dengan $F \subset E$ dan $\mu(E - F) < \varepsilon$. (Manuharawati; 2002:28).*

Diberikan himpunan terukur- μ^* . Fungsi $g: E \rightarrow \mathbb{R}^*$ dikatakan terukur- μ^* pada E jika untuk sebarang bilangan real c , berlaku

$$\{x \in E; g(x) > c\}$$

merupakan himpunan terukur- μ^* .

Fungsi $s: X \rightarrow \mathbb{R}^*$ disebut fungsi sederhana jika terdapat koleksi himpunan terukur- μ^* $\{E_1, E_2, E_3, \dots, E_n\}$ yang saling asing dan terdapat $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\} \subset \mathbb{R}$ sehingga

$$X = \bigcup_{i=1}^n E_i \text{ dan } s = \sum c_i \chi_{E_i}$$

Dengan χ_{E_i} merupakan fungsi karakteristik pada E_i .

Hubungan antara fungsi terukur- μ^* dengan fungsi sederhana tertuang dalam teorema berikut.

Teorema B.2: *Diberikan himpunan terukur- μ^* $E \subseteq X$. Jika fungsi $g: X \rightarrow \mathbb{R}^*$ terukur- μ^* pada E , maka terdapat barisan fungsi sederhana (s_n) yang konvergen ke fungsi g pada E . (Manuharawati; 2002: 38).*

C. Pembahasan

Dalam pembahasan ini X adalah ruang metrik kompak lokal nondiskret. Sebelum membahas teorema Lusin, terlebih dahulu dibuktikan tiga sifat fungsi terukur- μ^* berikut.

Teorema C.1 : *Jika $s: X \rightarrow \mathbb{R}^*$ merupakan fungsi sederhana, maka untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan tertutup $F \subset X$ dengan $\mu(X - F) < \varepsilon$ dan $s|_F$ kontinu pada F .*

Bukti : Karena s merupakan fungsi sederhana, maka terdapat koleksi himpunan terukur- μ^* $\{E_i : i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ yang saling asing dan bilangan-bilangan real $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sehingga

$$X = \bigcup_{i=1}^n E_i \text{ dan } s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$$

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena untuk setiap i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, E_i terukur- μ^* , maka berdasarkan Teorema B.1, terdapat himpunan tertutup $F_i \subset E_i$ dengan

$$\mu(E_i - F_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

jika dibentuk himpunan F dengan

$$F = \bigcup_{i=1}^n F_i$$

Maka diperoleh : F merupakan himpunan tertutup dan

$$\mu(X - F) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i - \bigcup_{i=1}^n F_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(E_i - F_i) < \varepsilon.$$

Karena E_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ saling asing, dan F tertutup, maka untuk setiap $x \in F$ terdapat bilangan real $\delta(x) > 0$ dan F_k sehingga

$$N(x, \delta(x)) \cap F = \bigcup_{x \in F} (N(x, \delta(x)) \cap F_k).$$

Lebih lanjut, karena s fungsi konstan pada $N(x, \delta(x)) \cap F_k$, maka s kontinu di x .

Hal ini berarti bahwa $s|_F$ kontinu pada F . ■

Teorema C.2: Diberikan fungsi $g, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ dan himpunan terukur- μ^* $E \subset X$ dengan $\mu(E) < \infty$. Jika untuk setiap bilangan asli n , fungsi g_n terukur- μ^* pada E dan barisan fungsi (g_n) konvergen ke fungsi g hampir di mana-mana pada E , maka untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ dan $\eta > 0$, terdapat himpunan tertutup $F \subset E$ dan bilangan asli N sehingga $\mu(E - F) < \eta$ dan untuk setiap $x \in F$ dan bilangan asli $n \geq N$ berlaku

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ dan $\eta > 0$. Jika untuk sebarang bilangan asli m dibentuk himpunan E_m dengan

$$E_m = \{x \in E : |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \text{ untuk setiap } n > m\},$$

Maka diperoleh : E_m terukur- μ^* dan $E_m \subset E_{m+1}$. Karena (g_n) konvergen ke fungsi g hampir di mana-mana pada E , maka

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m = E - E_0$$

Dengan

$$E_0 = \{x \in E : g(x) \text{ tidak konvergen ke } g(x)\}$$

Jadi $\mu(E_0) = 0$. Akibatnya:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(E_m) = \mu\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m\right) = \mu(E - E_0) = \mu(E).$$

Karena $\mu(E) < \infty$, maka dapat dipilih bilangan asli N sehingga

$$\mu(E - E_N) < \frac{\eta}{2}.$$

Karena E_m terukur- μ^* , maka berdasarkan Teorema B.1, terdapat himpunan tertutup $F \subset E_N$ dengan

$$\mu(E_N - F) < \frac{\eta}{2}.$$

Akibatnya $\mu(E - F) < \eta$ dan

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

untuk setiap $x \in F$ dan bilangan asli $n \geq N$. ■

Teorema C.3 (Teorema Egoroff): Diberikan fungsi $g, g_n: X \rightarrow \mathbb{R}^*$ dan himpunan terukur- μ^* $E \subset X$ dengan $\mu(E) < \infty$. Jika untuk setiap bilangan asli n , fungsi g_n terukur- μ^* pada E dan barisan fungsi (g_n) konvergen ke fungsi g hampir di mana-mana pada E , maka untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat himpunan tertutup $F \subset E$ sehingga $\mu(E - F) < \varepsilon$ dan (g_n) konvergen seragam ke fungsi g pada F .

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Berdasarkan Teorema C.2, untuk sebarang bilangan asli $m \geq 1$ dapat dipilih himpunan tertutup $F_m \subset E$ dan bilangan asli $N(\varepsilon, m)$ sehingga untuk setiap $x \in F_m$ dan untuk setiap $n \geq N(\varepsilon, m)$ berlaku

$$\mu(E - F_m) < \frac{\varepsilon}{2^m} \text{ dan } |g_m(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Jika dibentuk himpunan F dengan

$$F = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m,$$

Maka diperoleh: F merupakan himpunan tertutup dan $F \subset F_m$ untuk setiap m . Jadi (g_n) konvergen seragam ke fungsi g pada F . Karena

$$E - F = E - \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (E - F_m),$$

Maka

$$\mu(E - F) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(E - F_m) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema C.4 (Teorema Lusin): Diberikan fungsi $g: X \rightarrow \mathbb{R}^*$ dan sel $E \subset X$. Jika g terukur- μ^* pada E dan terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$|g(x)| < M$$

Maka terdapat fungsi $f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$ yang kontinu pada E , untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$|f(x)| < M,$$

Dan untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan tertutup $F \subset E$ sehingga $\mu(E - F) < \varepsilon$ dan $f = g$ pada F .

Bukti: Karena g terukur- μ^* pada E , maka berdasarkan Teorema B.2, terdapat barisan fungsi sederhana (s_n) yang konvergen ke fungsi g pada E . Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Berdasarkan Teorema C.1, untuk setiap bilangan asli n terdapat himpunan tertutup $F_n \subset E$ sehingga

$$\mu(E - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Dan $s_n \mid_{F_n}$ kontinu pada F_n . Karena E merupakan sel, maka $\mu(E) < \infty$. Berdasarkan Teorema C.3 (Teorema Egoroff), terdapat himpunan tertutup $F_0 \subset E$ sehingga

$$\mu(E - F_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dan (s_n) konvergen seragam pada F_0 . Jika dibentuk himpunan F dengan

$$F = F_0 \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \right),$$

Maka diperoleh: $F \subset E$, F tertutup, $s_n \mid_F$ kontinu pada F , dan

$$\mu(E - F) \leq \mu(E - F_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E - F_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena (s_n) yang konvergen seragam ke fungsi g pada F dan $s_n \mid_F$ kontinu pada F , maka g kontinu pada F . Jika dibentuk fungsi $f: X \rightarrow \mathbb{R}^*$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{untuk } x \in E \\ \lim_{t \rightarrow x} g(t) & \text{untuk } x \notin E - F \\ 0 & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Maka $f = g$ pada F , f kontinu pada E , dan untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$|f(x)| < M. \blacksquare$$

Daftar Pustaka

- Manuharawati, 2002, *Integral Henstock di dalam Ruang metrik Kompak Lokal*, Disertasi S3, PPs UGM, Yogyakarta.
- Royden, H.L., 1989, *Real Analysis*, Mac Milan Publishing Company, New York.
- Soeparna, D., Yusuf, dan Y.M. Sri, D.U., 1995, *Posisi Integral Lebesgue di dalam Integral Henstock*, Laporan Penelitian, FMIPA-UGM, Yogyakarta.
- Soeparna, D., 1995, *Some Small Riemann Sum Properties*, Research Report, FMIPA-UGM, Yogyakarta.